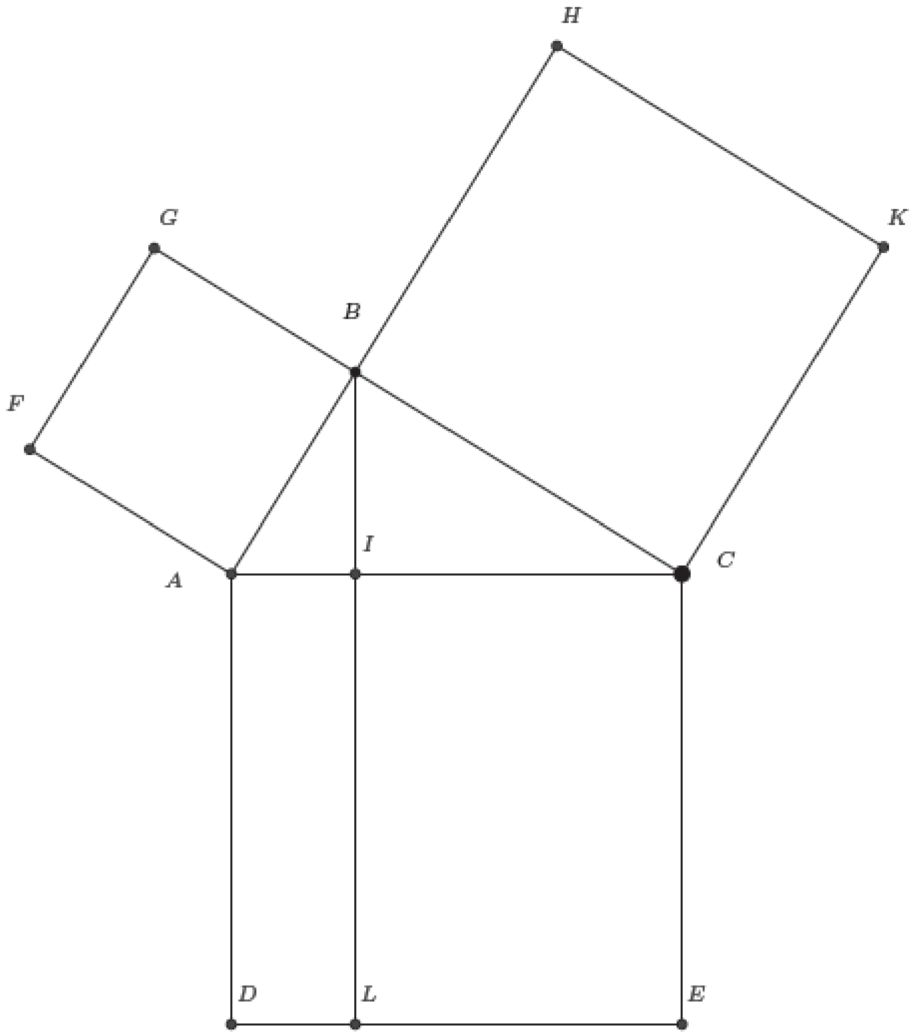
PREMIÈRE PARTIE

Les parties A et B de cette première partie sont indépendantes et peuvent donc être traitées séparément. La première est une démonstration du théorème de Pythagore, la seconde traite des nombres entiers qui forment des triplets pythagoriciens.

A – Démontrer le théorème de Pythagore

On veut démontrer le théorème de Pythagore à la manière d'Euclide[1]. Pour cela on construit un carré sur chacun des côtés du triangle rectangle ABC, rectangle en B, à l'extérieur de ce triangle. Soient les carrés $ABGF$, $BCKH$, $ACEF$ (figure ci-dessous). Il s'agit de montrer que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Pour cela on trace la perpendiculaire à la droite (AC) passant par B qui coupe la droite (AC) en I et la droite (DE) en L.


H
G
K
B
F
I
C
A
D
L
E

1. Démontrer que les points G, B et C sont alignés. Les droites (GC) et (FA) sont dans une configuration particulière. Quelle est-elle ? Démontrer cette conjecture.

2. Démontrer que les deux triangles AFC et ABD sont superposables[2].

3. Démontrer que les aires des triangles AFG et AFC sont égales, ainsi que celles des triangles ABD et ALD.

4. On admet que le quadrilatère $AILD$ est un rectangle. Déduire de la question précédente que l'aire du carré $AFGB$ est égale à l'aire du rectangle $AILD$.

5. Conclure en démontrant le théorème de Pythagore.

---

2. Deux triangles sont superposables s'ils ont leurs trois côtés respectivement égaux. Propriétés :

- Si deux triangles ont un angle de même mesure, compris entre deux cotés respectivement égaux alors ils sont superposables.
- Si deux triangles ont un coté égal respectivement et deux angles respectivement égaux, alors ces deux triangles sont superposables.

B. Triplets pythagoriciens

On s'intéresse ici aux triplets pythagoriciens. Un triplet (a, b, c) est dit pythagoricien si a, b, c sont trois nombres entiers naturels tels que

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Par exemple,

- Le triplet $(3, 4, 5)$ est pythagoricien car 3, 4 et 5 sont des entiers naturels et $3^2 + 4^2 = 5^2$;
- Le triplet $(1, 2, 3)$ n'est pas pythagoricien car $1^2 + 2^2$ n'est pas égal à 3^2.

1. Soient les deux nombres entiers 119 et 120. Déterminer le troisième nombre de telle sorte que le triplet soit pythagoricien.
   Même question avec les deux nombres entiers 56 et 65.

2. On attribue à Pythagore la propriété suivante qui permet de déterminer des triplets pythagoriciens :

   « Soit un nombre impair N donné, alors les nombres N ; $\frac{N^2-1}{2}$; $\frac{N^2+1}{2}$ forment un triplet pythagoricien. »

   2.a Démontrer que le carré d'un nombre impair N est un nombre impair (on pourra poser $N = 2p + 1$).

   2.b Si N est impair, quelle est la parité de N^2 et $N^2 + 1$?

   2.c Pourquoi, dans la propriété attribuée à Pythagore, faut-il prendre un nombre N impair ?

   2.d Montrer que si N est impair, alors le triplet N ; $\frac{N^2-1}{2}$; $\frac{N^2+1}{2}$ est bien un triplet pythagoricien.

   2.e Déterminer les triplets pythagoriciens pour les valeurs suivantes de N. (On pourra présenter les résultats dans un tableau.)

$$N = 3 \,;\, N = 5 \,;\, N = 7 \,;\, N = 9.$$

DEUXIÈME PARTIE

Exercice 1

On considère les nombres suivants :

$$A = \frac{146}{113} \qquad B = \frac{32}{35} \qquad C = \frac{31}{24} \qquad D = \frac{195}{150}$$

1. Parmi les nombres A, B, C et D, lesquels sont des décimaux ? Justifiez votre réponse.

2. Rangez les quatre nombres A, B, C et D dans l'ordre croissant.

3. Trouvez une fraction décimale, différente de A, B, C ou D, strictement comprise entre A et C.

Exercice 3

Vrai ou faux ? Les réponses doivent être justifiées (par démonstration ou appui sur un contre- exemple).

1. Si un quadrilatère a ses diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.

2. Si un quadrilatère possède trois angles droits alors c'est un parallélogramme.

3. Soit $ABCD$ un quadrilatère. Les angles en A et en C et sont droits ; les côtés $[AB]$ et $[AD]$ sont de même longueur ; les côtés $[CB]$ et $[CD]$ également. Alors $ABCD$ est un carré.